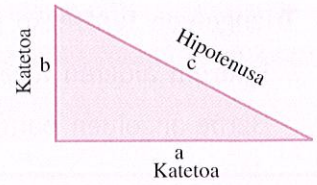


### 3 Pitagoraren teorema

**Pitagoraren teorema:** "Triangelu angeluzuzen batean, hipotenusaren berbidura katetoen berbiduren baturaren berdina da".

$$a^2 + b^2 = c^2$$



**203** Kalkulatu triangelu angeluzuzen hauen hipotenusa.

*Adibidea* Katetoak  $a = 12$  cm, eta  $b = 16$  cm:  $c^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 \Rightarrow c = \sqrt{400} = 20$  cm

a)  $a$  katetoa = 12 cm,  $b$  katetoa = 35 cm

b)  $a$  katetoa = 20 dm,  $b$  katetoa = 21 dm

c)  $a$  katetoa = 65 m,  $b$  katetoa = 72 m

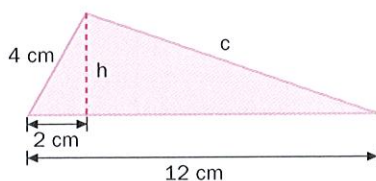
**204** Kalkulatu triangelu angeluzuzen hauetan falta den katetoa.

*Adibidea* Hipotenusa = 41 cm, katetoa = 40 cm:  $c^2 = 41^2 - 40^2 = 481 - 400 = 81 \Rightarrow c = \sqrt{81} = 9$  cm

a) Hipotenusa = 13 cm, katetoa = 12 cm

b) Hipotenusa = 73 m, katetoa = 48 m

**205** Kalkulatu triangelu honen altuera ( $h$ ) eta  $c$  aldea.



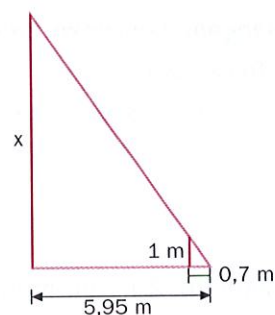


- 213** Triangelu baten aldeek 18, 30 eta 36 zentimetro dituzte. Kalkulatu antzeko triangelu baten aldeek zenbat neurtuko duten, jakinda alderik txikienak 6 zentimetro dituela.

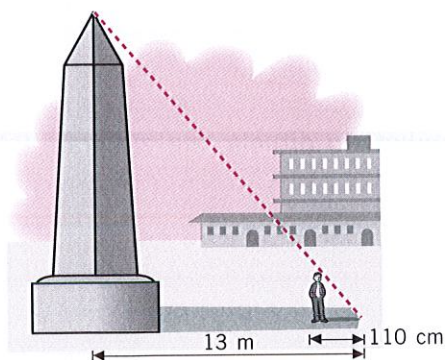
- 214** 1 metro luzeko makila bertikal batek 70 zentimetroko itzala egiten badu, zer-nolako altuera izango du 5,95 metroko itzala egiten duen zuhaitz batek?

Talesen teorema erabiliz (suposatzen da eguzki-argiaren izpiak paraleloak direla), honela adieraziko dugu:

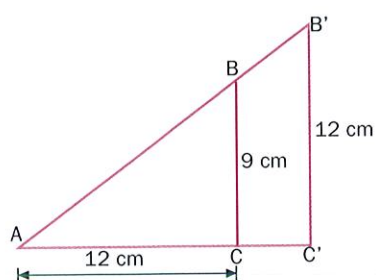
$$\frac{0,70}{5,95} = \frac{1}{x} \Rightarrow 0,7 \cdot x = 1 \cdot 5,95 \Rightarrow x = \frac{5,95}{0,7} = \boxed{8,5 \text{ m}}$$



- 215** Kalkulatu 13 metroko itzala egiten duen obelisko baten altuera, kontuan izanik 1,75 metroko pertsona batek 110 zentimetroko itzala egiten duela.



- 216** Talesen eta Pitagorasaren teoremak erabiliz, kalkulatu falta diren aldeen neurriak.





## 5 Poligonoen distantziak

Poligono bateko bi punturen arteko distantzia kalkulatzeko, askotan, Pitagorasen teorema erabiltzen da.

### 217 Kalkulatu trapezio isoszele honen altuera.

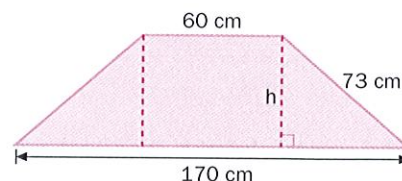
Irudiari erreparatuz, bi triangelu angeluzuzen ikusiko ditugu; horien altuera katetoetako bat izango da, eta hipotenusa, alde zeharra.

Trapezio isoszelea denez, beste katetoaren neurria hau da:

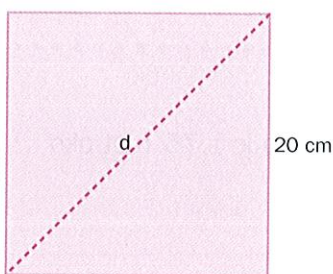
$$\frac{170 - 60}{2} = 55 \text{ cm}$$

Triangelu horietako batean Pitagorasen teorema aplikatuz, hau lortuko dugu:

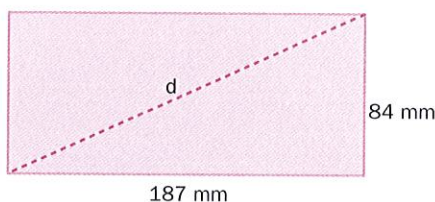
$$h^2 = 73^2 - 55^2 = 2.304 \Rightarrow h = \sqrt{2.304} = 48 \text{ cm}$$



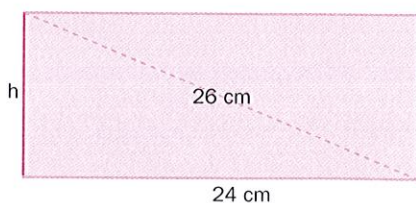
### 218 Kalkulatu 20 zentimetroko aldeak dituen karratu honen diagonalak.



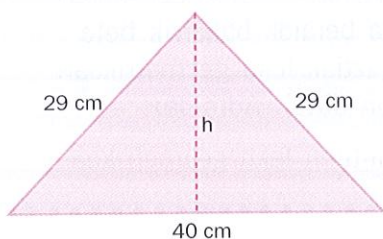
### 219 Kalkulatu laukizuzen honen diagonalak, jakinda oinarriak 187 milimetro dituela, eta altuerak, 84.



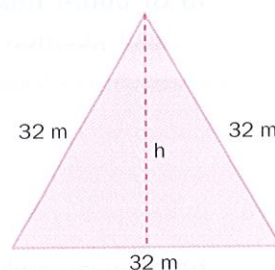
### 220 Laukizuzen baten oinarriak 24 zentimetro ditu, eta diagonalek, 26. Kalkulatu laukizuzenaren altuera.



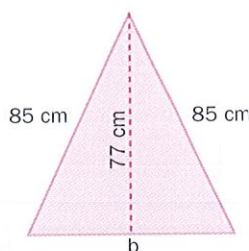
- 221** Triangelu isoszele baten alde berdinek 29 zentimetro dituzte, eta oinarriak, 40. Kalkulatu altuera.



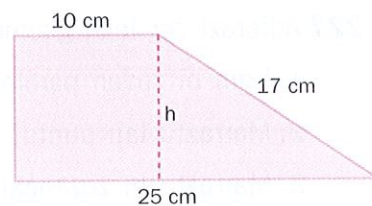
- 222** Triangelu aldeberdin baten aldeek 32 metro dituzte. Kalkulatu altuera.



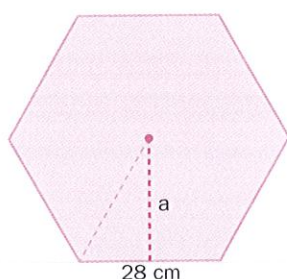
- 223** Zenbat zentimetro ditu triangelu isoszele baten oinarriak, 77 zentimetroko altuera badu, eta haren aldeek 85 zentimetro badituzte?



- 224** Trapezio angeluzuzen baten oinarriek 10 eta 25 zentimetro dituzte, eta alde zehiarrak, 17. Kalkulatu zenbat zentimetro dituen beste aldeak.



- 225** Kalkulatu 28 zentimetroko aldeko hexagono erregular honen apotema (gogoratu hexagonoaren erradioak eta aldeek neurri bera dutela).



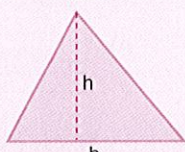


# 10. Azalerak eta bolumenak

## 1 Irudi lauen perimetroak eta azalerak

- Poligono baten **perimetroa** ( $p$ ) haren alde guztien batura da. Zirkunferentzia baten perimetroa, aldiz, haren luzera da,  $p = 2\pi r$ .
- Zenbait irudiz osatutako irudi baten **azalera** kalkulatzeko, irudia osatzen duten irudi soilen azalera kalkulatu behar da. Jarraian, irudi soil batzuen azalerak ikus daitezke.

**Triangelua**



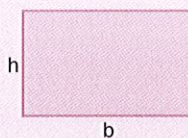
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

**Karratua**



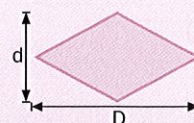
$$A = l^2$$

**Laukizuzena**



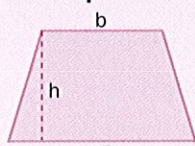
$$A = b \cdot h$$

**Erronboa**



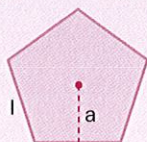
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

**Trapezioa**



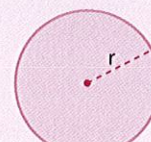
$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

**Poligono erregularra**



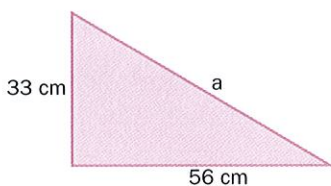
$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

**Zirkulua**



$$A = \pi \cdot r^2$$

**271** Kalkulatu irudi hauen perimetroa.



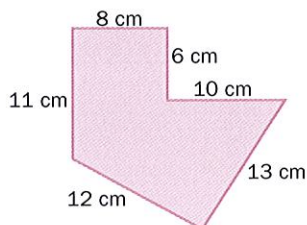
**Adibidea** Aplikatu Pitagorasen teorema, falta den aldea kalkulatzeko.

$$a^2 = 33^2 + 56^2 = 4.225$$

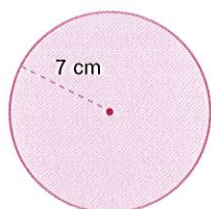
$$a = \sqrt{4.225} = 65 \text{ cm}$$

Perimetroa hau da:  $P = 33 + 56 + 65 = 154 \text{ cm}$

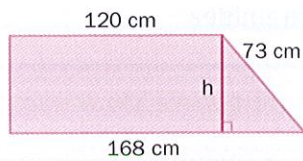
a)



b)



272 Kalkulatu irudi hauen azalera.

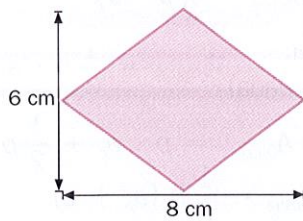


**Adibidea** Azalera kalkulatzeko, altuera,  $h$ , falta zaigu, eta hori triangelu angeluzuzenetik abiatuz lortuko dugu. Triangelu horren altuera kateto bat da; beste katetoaren neurria hau da:  $x = 168 - 120 = 48$  cm, eta hipotenusarena: 73 cm.

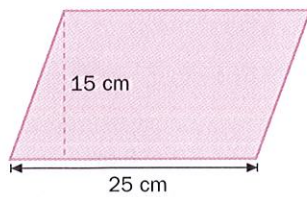
Aplikatu Pitagorase teorema:  $73^2 - 48^2 = h^2$ ;  $h = 55$  cm

Beraz, azalera hau da:  $A = \frac{120 + 168}{2} \cdot 55 = 7.920 \text{ cm}^2$

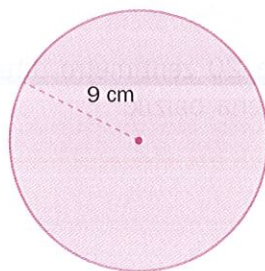
a)



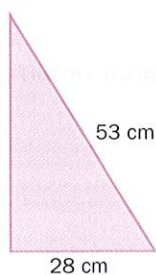
b)



c)



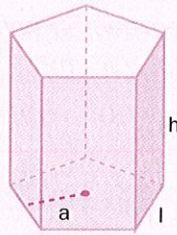
d)





## 2 Prismen eta piramideen azalera

Prisma

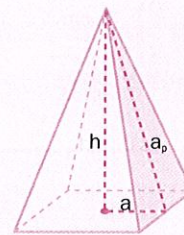


$$\text{Alboko azalera: } A_{\text{Albokoa}} = p \cdot h$$

$$\text{Oinarrien azalera: (oinarria erregularra bada) } A_{\text{Oinarriak}} = 2 \frac{p \cdot a}{2} = p \cdot a$$

$$A_{\text{Guztira}} = A_{\text{Albokoa}} + A_{\text{Oinarriak}} = p \cdot h + p \cdot a \Rightarrow \\ \Rightarrow A_{\text{Guztira}} = p(h + a)$$

Piramidea



$$\text{Alboko azalera: } A_{\text{Albokoa}} = \frac{1}{2} p \cdot a_p$$

$$\text{Oinarriaren azalera: (oinarria erregularra bada) } A_{\text{Oinarria}} = \frac{1}{2} p \cdot a$$

$$A_{\text{Guztira}} = A_{\text{Albokoa}} + A_{\text{Oinarria}} = p \cdot a_p + \frac{1}{2} p \cdot a \Rightarrow \\ \Rightarrow A_{\text{Guztira}} = \frac{1}{2} p (a_p + a)$$

**273** Kalkulatu oinarri karratuko piramide baten guztizko azalera, kontuan izanik oinarriaren aldeek 12 zentimetro dituztela, eta altuerak, 8.

Kalkulatu piramidearen apotema. Adierazitako triangelu angeluzuzenean, aplikatu Pitagorasen teorema:

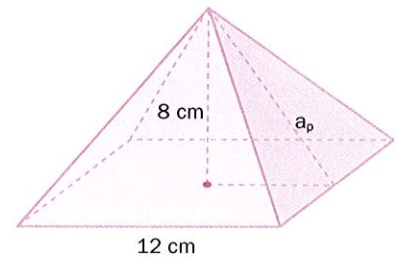
$$a_p^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow a_p = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

$$\text{Oinarria karratu bat denez, perimetroa hau da: } 12 \cdot 4 = 48 \text{ cm}$$

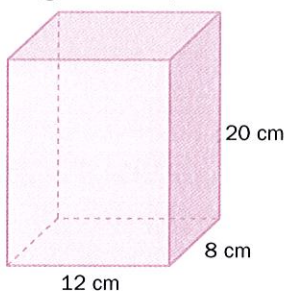
$$\text{Hortaz: } A_{\text{Albokoa}} = \frac{48 \cdot 10}{2} = 240 \text{ cm}^2$$

$$\text{Beste alde batetik, } A_{\text{Oinarria}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$$

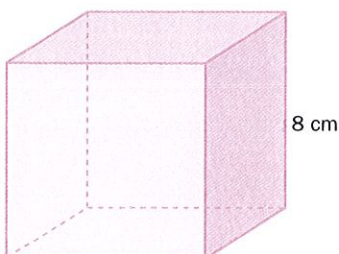
$$\text{Eta guztizko azalera: } A_{\text{Guztira}} = 240 + 144 = \boxed{384 \text{ cm}^2}$$



**274** Kalkulatu prisma angeluzuzen baten guztizko azalera, jakinda, 8, 12 eta 20 zentimetro dituela. Gogoan izan, ortoedroaren oinarria ez dela poligono erregularra, laukizuzena baizik.

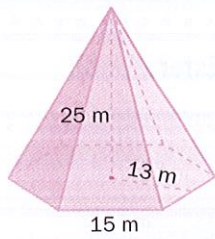


**275** Kalkulatu 8 zentimetro ertzeko kubo baten guztizko azalera, kontuan izan kuboaren oinarria karratua dela.





**276** Kalkulatu gorputz geometriko hauen alboko azalera zein guztizko azalera.



Kalkulatu oinarriaren azalera:

$$A_{\text{Oinarria}} = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 15 \cdot 13}{2} = 585 \text{ cm}^2$$

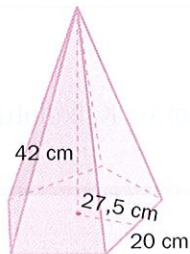
Alboko azalera kalkulatzeko, alboko apotema behar dugu:

$$a_p = \sqrt{25^2 + 13^2} = 28,18 \text{ cm}$$

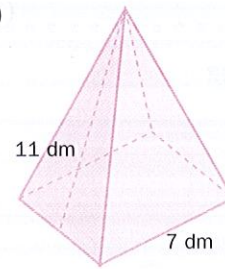
$$A_{\text{Albokoa}} = \frac{p \cdot a_p}{2} = \frac{6 \cdot 15 \cdot 28,18}{2} = 1.268,1 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Guztira}} = A_{\text{Oinarria}} + A_{\text{Albokoa}} = 585 + 960,75 = 1.853,1 \text{ cm}^2$$

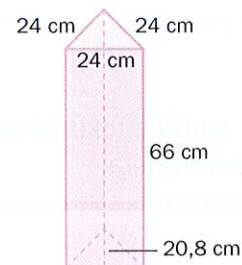
a)



b)

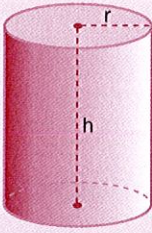


c)



### 3 Biraketa-gorputzen azalerak

Zilindroa

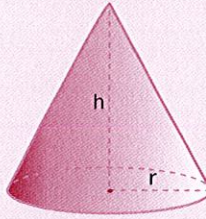


$$A_{\text{Oinarria}} = \pi \cdot r^2$$

$$A_{\text{Albokoa}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$A_{\text{Guztira}} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

Konoa

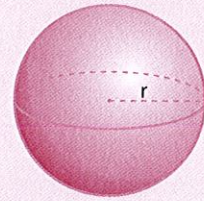


$$A_{\text{Oinarria}} = \pi \cdot r^2$$

$$A_{\text{Albokoa}} = \pi \cdot r \cdot g$$

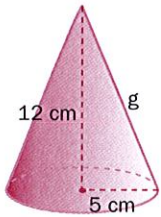
$$A_{\text{Guztira}} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g$$

Esfera



$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

**277** Kalkulatu 12 zentimetroko altuerako kono baten guztizko azalera. Oinarriak 10 zentimetroko diametroa du.



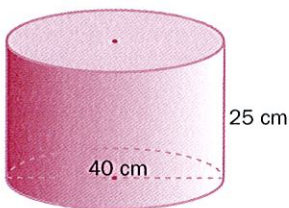
Lehenengo, kalkulatu sortzailea. Triangelu angeluzuzena denez, aplikatu Pitagorasen teorema:

$$g^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow g = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

Beraz:

$$\left. \begin{array}{l} A_{\text{Albokoa}} = 3,14 \cdot 5 \cdot 13 = 204,1 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{Oinarria}} = 3,14 \cdot 5^2 = 78,5 \text{ cm}^2 \end{array} \right\} A_{\text{Guztira}} = 204,1 + 78,5 = \boxed{282,6 \text{ cm}^2}$$

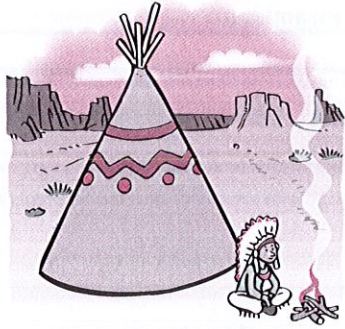
**278** Zilindro batek 25 zentimetroko altuera du, eta oinarriaren diametroak 40 zentimetro. Kalkulatu zilindroaren guztizko azalera.



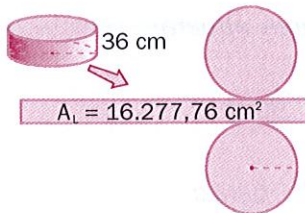
**279** Kalkulatu 24 zentimetroko erradioa duen esferaren azalera.



- 280** Tipi indiar batek 5 metroko diametroa eta 6 metroko altuera du. Zenbat oihal beharko da tipi bat eraikitzeko?

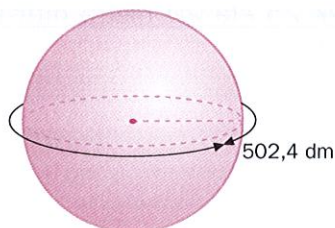


- 281** Zilindro batek 36 zentimetroko altuera du, eta haren alboko azalerak 16.277,76 zentimetro koadro ditu. Zer neurrikoa da oinarriko erradioaren luzera?



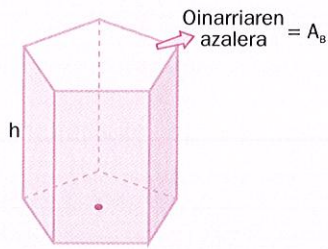
- 282** Lata zilindriko baten oinarriaren erradioak 8 zentimetro ditu, eta haren altuera oinarriaren zirkunferentziaren luzeraren erdia da. Zenbat latorri erabili beharko da lata hori egiteko?

- 283** Esfera bateko zirkunferentzia maximoaren luzerak 502,4 dezimetro ditu. Kalkulatu esfera honen azalera.



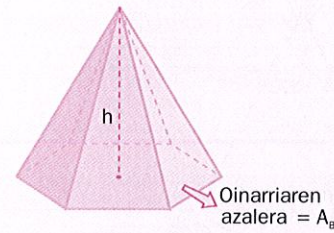
## 4 Prismen eta piramideen bolumenak

Prisma



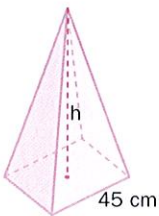
$$V_{\text{Prisma}} = A_B \cdot h$$

Piramidea



$$V_{\text{Piramidea}} = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

**284** Oinarri karratuko piramide baten oinarriko ertzak 45 zentimetro ditu, eta haren altuera oinarriaren perimetroaren erdia da. Kalkulatu piramidearen bolumena.



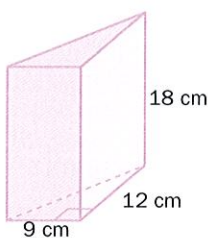
Kalkulatu oinarriaren perimetroa, eta ondoren, piramidearen altuera:

$$p = 4 \cdot 45 = 180 \Rightarrow h = \frac{180}{2} = 90 \text{ cm}$$

Oinarriaren azalera hau da:  $A_B = l^2 = 45^2 = 2.025 \text{ cm}^2$ . Beraz:

$$V = \frac{2.225 \cdot 90}{3} = \boxed{60.750 \text{ cm}^3}$$

**285** Triangelu formako prisma bat dugu 18 zentimetroko altuerakoa, eta haren oinarria triangelu angeluzuzen bat, 9 eta 12 katetoduna. Kalkulatu prismaren bolumena.



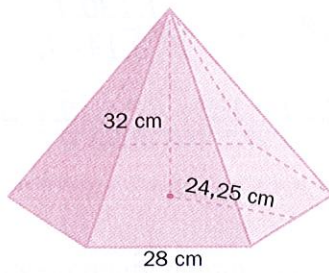
**286** Ur-andel batek prisma angeluzuzenaren itxura du. Haren oinarriko aldeek 25 eta 20 metro dituzte. Kalkulatu 1.000 metro kubo ur sartu ahal izateko izan behar duen altuera.



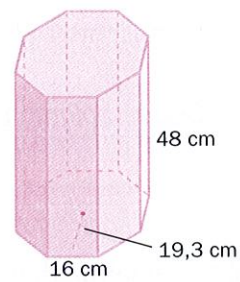
**287** Kubo baten guztizko azalera 150 zentimetro koadro da. Kalkulatu kubo horren bolumena.

**288** Kalkulatu gorputz geometriko hauen bolumena.

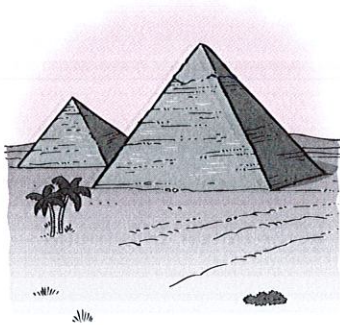
a)



b)

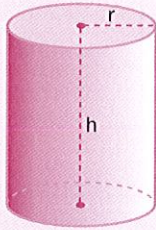


**289** Egiptoko Kefren piramidearen oinarri karratuak 214,5 metroko aldeak ditu, eta 143,2 metroko altuera du. Kalkulatu piramidearen bolumena.



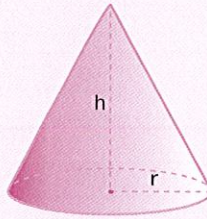
## 5 Biraketa-gorputzen bolumenak

Zilindroa



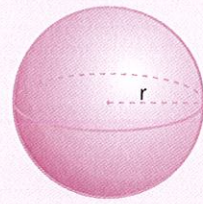
$$V_{\text{Zilindroa}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Konoa



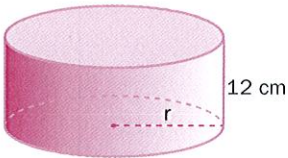
$$V_{\text{Konoa}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Esfera



$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

**290** Zilindro baten alboko azalerak 1.130,4 zentimetro koadro ditu, eta altuerak, 12 zentimetro. Kalkulatu zilindroaren bolumena.

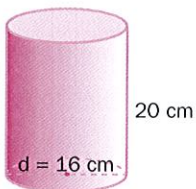


Lehenengo, kalkulatu zilindroaren erradioa, alboko azaleratik abiatuta:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \Rightarrow 1130,4 = 2 \cdot 3,14 \cdot r \cdot 12 \Rightarrow r = \frac{1.130,4}{2 \cdot 3,14 \cdot 12} = 15 \text{ cm}$$

Beraz, bolumena hau da:  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 15^2 \cdot 12 = \boxed{8.478 \text{ cm}^3}$

**291** Kalkulatu 16 zentimetroko diametroko oinarria, eta 20 zentimetroko altuera dituen zilindroaren bolumena.

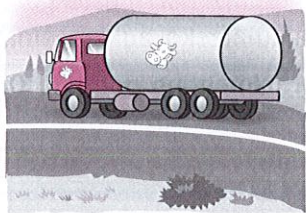


**292** Zilindro batek 100,48 zentimetroko altuera du eta neurri bera du oinarriko zirkunferentziaren luzerak ere. Zein da zilindroaren bolumena?

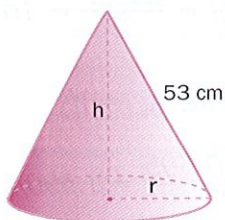
**293** Kalkulatu 5 zentimetroko erradioko eta 12 zentimetroko altuera dituen kono baten bolumena.



- 294** Zisterna-kamioi baten zilindro formako tangak 6 metroko luzera eta 1,5 metroko erradioa ditu. Zenbat metro kubo esne garraia dezake? Adierazi erantzuna litrotan ere.



- 295** Kalkulatu 56 zentimetroko diametroa eta 53 zentimetroko sortzailea dituen kono honen bolumena.



- 296** Esfera baten erradioak 15 zentimetro ditu. Kalkulatu esfera horren bolumena.

- 297** Esfera baten azalerak 6.079,04 zentimetro koadro ditu. Kalkulatu esfera horren bolumena.